

منطق و زبان شناسی

مترجم
فاطمه راکعی

ینس آلود
لارس - گونار آندرسن
استین دال

منطق

مجموعه ها

گزاره ها

مجموعات

موجّهات

زبان شناسی



نویسندگان ایرانی و اطلاعات فنی

به نام پروردگار یکتا

منطق و زبان‌شناسی

ینس آل‌وود
لارس-گونار آندرسن
آستین دال

مترجم
فاطمه راکعی



پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی

تهران ۱۳۹۹



پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی

فروشگاه کتاب: خیابان کریم‌خان‌زند، بین قرنی و ایرانشهر، پلاک ۱۷۶ تلفن: ۸۳۱۷۱۹۲

منطق و زبان‌شناسی

مؤلفین: ینس آلود، لارس-گونار آندرسن و اُستِن دال

مترجم: فاطمه راکعی

مدیر انتشارات: یدالله رفیعی

مدیر تولید و نظارت: سیدمحمدحسین محمدی

ویراستار: دکتر اسدا... فلاحی

نمونه‌خوان: مهدی قبادی

صفحه‌آرا: جابر شیخ محمدی

مسئول فنی: عرفان بهار دوست

چاپ اول: ۱۳۹۹

شمارگان: ۳۰۰ نسخه

چاپ و صحافی: گام اول

قیمت: ۵۶۰۰۰ تومان

حق چاپ برای پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی محفوظ است.

سرشناسه: آلود، ینس اس، ۱۹۴۷- م.

-Allwood, Jens S., 1947

عنوان و نام پدیدآور: منطق و زبان‌شناسی / ینس آلود، لارس - گونار آندرسن، استن دال؛ مترجم فاطمه راکعی.

مشخصات نشر: تهران: پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی، ۱۳۹۹.

مشخصات ظاهری: ۲۷۸ ص.

شابک: 978-622-6304-89-4

وضعیت فهرست نویسی: فیبا

یادداشت: عنوان اصلی: Logic in linguistics.

موضوع: زبان - فلسفه، موضوع: Language and languages - Philosophy

موضوع: منطق ریاضی، موضوع: Logic, Symbolic and mathematical

شناسه افزوده: آندرسن، لارس-گونار، ۱۹۴۷- م.

شناسه افزوده: Andersson, Lars-Gunnar, 1947-

شناسه افزوده: دال، اوستن، ۱۹۴۵- م، شناسه افزوده: Dahl, Osten, 1945-

شناسه افزوده: راکعی، فاطمه، ۱۳۳۳ -، مترجم

شناسه افزوده: پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی

شناسه افزوده: Institute for Humanities and Cultural Studies

رده بندی کنگره: P۱۰۷

رده بندی دیویی: ۴۰۱

شماره کتابشناسی ملی: ۷۵۰۱۱۲۷

وضعیت رکورد: فیبا

فهرست مطالب

مقدمه‌ی مترجم ۷

پیش‌گفتارِ مترجمانِ انگلیسی ۹

فصل اول: منطق برای زبان‌شناسان

منطق برای زبان‌شناسان ۱۳

فصل دوم: نظریه‌ی مجموعه‌ها

۱.۲ مجموعه‌ها و عضوها ۱۵

۲.۲ نسبت‌های بین مجموعه‌ها ۱۸

۳.۲ عمل‌های روی مجموعه‌ها ۱۹

۴.۲ نسبت‌ها و تابع‌ها ۲۲

فصل سوم: استنتاج و تحلیل منطقی جمله‌ها

۱.۳ استنتاج ۲۹

۲.۳ صورت منطقی ۳۲

۳.۳ جمله‌ها و گزاره‌ها ۳۴

۴.۳ جهان‌های ممکن و مجموعه‌ی صدق یک گزاره ۳۷

۵.۳ جمله‌های تحلیلی و ترکیبی ۳۸

۶.۳ جمله‌های ساده و مرکب ۴۰

۷.۳ عمق تحلیل منطقی ۴۱

فصل چهارم: منطق گزاره‌ها

۱.۴ ادات‌ها ۴۲

۲.۴ معنای ادات‌های منطقی ۴۶

۴۷	۱.۲.۴ ناقض ~
۴۹	۲.۲.۴ عاطف &
۵۲	۳.۲.۴ فاصل ∇
۵۵	۴.۲.۴ ادات شرط →
۵۹	۵.۲.۴ هم‌ارزی ≡
۶۰	۳.۴ ساخت سازه‌ای را چه‌گونه نشان دهیم؟
۶۴	۴.۴ نحو و معناشناسی منطق حساب گزاره‌ها
۶۵	۵.۴ نحو
۶۷	۶.۴ معناشناسی
۷۰	۷.۴ راست‌گوها و تناقض‌ها
۷۱	۸.۴ جدول‌های ارزش

فصل پنجم: منطق محمول‌ها

۸۰	۱.۵ گسترش تحلیل منطقی
۸۴	۲.۵ سورها
۹۵	۳.۵ جمع‌بندی نحو منطق محمول‌ها
۹۷	۴.۵ معناشناسی منطق محمول‌ها
۱۰۳	۵.۵ صادق در همه‌ی تعبیرها
۱۰۹	۶.۵ جمع‌بندی معناشناسی منطق محمول‌ها
۱۱۰	۷.۵ بیانی صوری از معناشناسی
۱۱۵	۸.۵ ویژگی‌های صوری نسبت‌ها
۱۱۵	۱.۸.۵ انعکاس
۱۱۶	۲.۸.۵ تقارن
۱۱۶	۳.۸.۵ تعدی
۱۱۷	۴.۸.۵ عکس
۱۱۷	۵.۸.۵ ساختمان دامنه و هم‌دامنه‌ی نسبت‌ها

فصل ششم: استنتاج

۱۲۴	۱.۶ دستگاه استنتاجی
۱۳۳	۲.۶ قواعد استنتاجی در مکالمه‌های روزمره

فصل هفتم: منطق وجهی

۱۳۸	۱.۷ عمل‌گرهای وجهی
۱۴۱	۲.۷ استلزام اکید
۱۴۲	۳.۷ وجه‌های دیگر
۱۴۵	۴.۷ مسائل مربوط به دامنه و این‌همانی در منطق وجهی
۱۴۵	۱.۴.۷ ایهام‌های جهت گزاره یا جهت شیء
۱۴۷	۲.۴.۷ تعین
۱۴۹	۳.۴.۷ تیرگی
۱۵۱	۴.۴.۷ این‌همانی در جهان‌های ممکن
۱۵۲	۵.۷ جمله‌های خلاف واقع
۱۵۳	۶.۷ منطق زمان و نقاط ارجاع

فصل هشتم: منطق مفهومی و دستور مقوله‌ای

۱۵۸	۱.۸ مفهوم‌ها و مصداق‌ها
۱۶۱	۲.۸ مفهوم
۱۶۵	۳.۸ اصل [ترکیب] فرگه
۱۶۶	۴.۸ اصل [ترکیب] فرگه و دستور مقوله‌ای
۱۷۲	۵.۸ مقوله‌ها، مفهوم‌ها و نوع‌ها

فصل نهم: گسترش منطق محمول‌ها

۱۸۵	۱.۹ منطق محمول‌های مرتبه‌ی دوم و عمل‌گرهای محمولی
۱۸۶	۲.۹ پیش‌فرض‌ها و وصف‌های خاص
۱۹۱	۳.۹ تحلیل کاربردشناختی پیش‌فرض‌ها
۱۹۳	۴.۹ عمل‌گر انتزاع یا لاندا

فصل دهم: منطق و زبان‌شناسی

۱۹۶	۱.۱۰ کلیات
۱۹۷	۲.۱۰ مفهوم معنا
۲۰۳	۳.۱۰ نقش زبان‌های صوری در تحلیل زبان طبیعی
۲۰۸	۴.۱۰ محدودیت‌های منطق کلاسیک

منابع	۲۱۳
پاسخ تمرین‌ها	۲۱۷
واژه‌نامه‌ی فارسی به انگلیسی	۲۲۷
واژه‌نامه‌ی انگلیسی به فارسی	۲۴۸
نمایه	۲۶۹

مقدمه‌ی مترجم

با کتاب «Logic in Linguistics»، به عنوان کتاب درسی کلاس «زبان و منطق» دکتر محمد رضا باطنی در دوره‌ی فوق‌لیسانس زبان‌شناسی دانشگاه تهران آشنا شدم، که فصل‌هایی از آن توسط ایشان تدریس شد. مطالعات قبلی‌ام در حوزه‌ی منطق و شیوه‌ی تدریس دکتر باطنی، که شوق و انگیزه‌ی پژوهش را در دانشجویان زنده می‌کرد، علاقه‌ی مرا به غور بیش‌تر در رابطه‌ی زبان و منطق، و سپس، انگیزه‌ام را برای ترجمه‌ی کتاب یاد شده، برانگیخت. گرچه ویرایش نهایی کتاب، به‌خاطر درگیری‌های فکری و عملی‌ام با مسائل اجتماعی، متأسفانه چندین سال به طول انجامید، اما شوق تکمیل و انتشار آن هیچ‌گاه ذهنم را ترک نکرد. خدا را شاکرم که سرانجام ترجمه‌ی این کتاب به فرجام رسید؛ با این امید که محرکی باشد برای پژوهش‌های جدی‌تر در حوزه‌ی میان‌رشته‌ای زبان‌شناسی و منطق.

در این جا توضیح موارد زیر را لازم می‌دانم:

۱. در انتخاب معادل‌های فارسی برای واژه‌ها و اصطلاحات تخصصی منطق، منبع اصلی کتاب «واژه‌نامه‌ی توصیفی منطق (انگلیسی به فارسی)»، تألیف ضیاء موحد (۱۳۷۴) به همت انتشارات پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی بوده و برای معادل‌های فنی زبان‌شناسی از «واژگان گزیده‌ی زبان‌شناسی»، تألیف مصطفی عاصی و محمد عبدعلی (۱۳۷۵) چاپ انتشارات علمی و فرهنگی استفاده شده است؛ گرچه در برخی موارد که معادل مناسب در این فرهنگ‌ها موجود نبوده، به منابع دیگر مراجعه شده یا با آقایان، دکتر ضیاء موحد و دکتر اسدالله فلاحتی در مورد معادل مناسب مشورت شده است. برای نمونه، می‌توان به تعیین معادل فارسی برای واژه‌های «domain»، «range» و «scope» در حوزه‌های مختلف اشاره کرد. در نظریه‌ی مجموعه‌ها در بخش تابع‌ها برای واژه‌ی «domain»، معادل «دامنه» و برای واژه‌ی «range»، معادل «بُرد» در نظر گرفته شده، درحالی‌که در مبحث ادات‌ها و سورها، واژه‌ی «scope» به «دامنه» و «range» به «گستره» ترجمه شده است.

۲. شیوه‌نامه‌ی اصلی مورد استفاده برای نگارش و تنظیم فرمول‌ها، شیوه‌نامه‌ی مرکز نشر دانشگاهی بوده، گرچه در مواردی، به سایر شیوه‌نامه‌ها و نیز کتاب‌های ترجمه شده‌ی منطق، به ویژه ترجمه‌های دکتر ضیاء موحد، مراجعه شده است.

۳. هرچند در ترجمه، سعی بر رعایت کامل امانت بوده، در برخی موارد، به پیشنهاد ویراستار محترم، به منظور درک بهتر مفاهیم از سوی خواننده‌ی فارسی زبان، آگاهانه تغییراتی ایجاد شده است؛ از آن جمله می‌توان به کاربرد اسامی فارسی برای برخی اسامی بیگانه و استفاده از مثال‌های فارسی به جای بعضی از مثال‌های انگلیسی اشاره کرد.

وظیفه‌ی خود می‌دانم از استاد ارجمند، آقای دکتر ضیاء موحد، به خاطر ویرایش علمی اولیه‌ی کتاب، از آقای دکتر اسدالله فلاحتی برای ویرایش مجدد آن، هم‌چنین از استاد احمد سمیعی برای تأیید نگارش ادبی آن، قدردانی و سپاس‌گزاری کنم. هم‌چنین از همکاران بزرگوaram، آقای دکتر یحیی مدرسی، خانم دکتر شهین نعمت‌زاده، و آقای دکتر سیامک کاظمی، که از نظرات علمی و فنی ارزشمندشان بسیار بهره برده‌ام، صمیمانه تشکر می‌کنم. از آقای مهدی قبادی که در تنظیم نهایی کتاب بسیار کمک کردند، از خانم زینب جهانبان، که تایپ دقیق اثر را به عهده داشتند و از مسئولان محترم انتشارات پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی، که تایپ مجدد و ویرایش‌های متعدد کتاب را پذیرا بودند، نیز بسیار متشکرم.

فاطمه راکعی

تیرماه ۱۳۹۹

پیش‌گفتار مترجمانِ انگلیسی

کتاب حاضر، مبنای اثری است که با عنوان «درآمدی بر منطق برای زبان‌شناسان» در سال ۱۹۷۱ به زبان سوئدی منتشر شد و ترجمه‌ی آلمانی آن در سال ۱۹۷۳ به چاپ رسید. همه‌ی فصل‌های کتاب سوئدی مورد اصلاح و تجدیدنظر قرار گرفته و مطالبی چند، از جمله کل فصل ۸ به آن افزوده شده، اما هدف تغییر نکرده است: آشنا کردن زبان‌شناسان و دیگر علاقه‌مندان زبان، با منطق، به‌طوری که بتوانند دریابند که مفاهیم منطقی در نظریه‌ی زبانی، به‌ویژه در معناشناسی، چه‌گونه به‌کار می‌رود (یا می‌تواند به‌کار برود).

در این راه، از پیشنهادها و انتقادهای بسیار کسان بهره برده‌ایم. علاوه بر همکاری چند دوره از دانشجویان گروه زبان‌شناسی گوتبرگ^۱، که باید به‌عنوان گروه آزمایشی از آن‌ها استفاده می‌شد، مایلیم از کلاس آبرگ^۲، که دست‌نویس کتاب را در مراحل مختلف آماده‌سازی خوانده است، از مایکل گربسکی^۳ که آن را از سوئدی به آلمانی برگردانده و تغییراتی را پیشنهاد کرده - که بسیاری از آن‌ها در تقریر حاضر اعمال شده - هم‌چنین از جان لاینز^۴ که یکی از ویراستاران این مجموعه است، تشکر کنیم. از پیتر هینست^۵ نیز سپاس‌گزاریم، به‌خاطر نقد کوبنده‌اش به تقریر آلمانی اثر که بعضی از انتقادهایش را می‌پذیریم. اگر سرسختی‌های ما نبود، همه‌ی این افراد می‌توانستند تأثیرات مثبت به مراتب بیش‌تری بر کتاب داشته باشند. باید به‌خاطر همکاری صمیمانه در زمینه‌ی تایپ و ویرایش از پیر جاوانود^۶، آن - ماری رانستراند^۷ و کارکنان انتشارات دانشگاه کمبریج تشکر کنیم.

1. Göteborg

2. Claes Åberg

3. Michael Grabski

4. John Lyons

5. Peter Hinst

6. Pierre Javanaud

7. Ann-Mari Ranstrand

گرچه کتاب، حاصل کار گروهی است، مسئولیت اصلی فصل‌های مختلف، به‌ترتیب، با افراد زیر بوده است:

- فصل‌های ۱، ۳، ۴، ۸ و بخش ۳ از فصل ۹، ينس آل‌وود^۱

- فصل‌های ۵ و ۶، لارس - گونار اندرسن^۲

- فصل‌های ۲، ۷، ۱۰ و بقیه‌ی فصل ۹، اُستن دال^۳.

نمادها و نشانه‌ها

€	نشانه‌ی عضو (عضو... بودن)	ص ۱۶
∉	عضو نبودن	ص ۱۶
{ }	دو ابرو (علامت مجموعه)	ص ۱۶
∅	مجموعه‌ی تهی	ص ۱۶
I	مجموعه‌ی فراگیر (جهانی)	ص ۱۸
⊂	اندراج محض (زیرمجموعه محض... بودن)	ص ۱۸
⊆	اندراج (زیرمجموعه‌ی... بودن)	ص ۱۸
=	این همانی مجموعه	ص ۱۹
∩	اشتراک	ص ۲۰
∪	اجتماع	ص ۲۰
-	تفاضل	ص ۲۰
C	مکمل	ص ۲۲
<>	دوگوشه (علامت n-تایی)	ص ۲۲
t	صادق	ص ۴۵
f	کاذب	ص ۴۵
	خطِ شفر	ص ۴۶
~ (-, -)	نفی	ص ۴۷
& (∧, ∨)	عاطف	ص ۴۹
∇	یای مانع خلو	ص ۵۳
(∇)	یای انفصال حقیقی	ص ۵۳

1. Jens Allwood

2. Lars-Gunnar Andersson

3. Östen Dahl

۵۵ ص	استلزام (مادی)	$\rightarrow (\supset)$
۵۹ ص	ادات هم‌ارزی	$\equiv (\leftrightarrow, \S)$
۸۴ ص	سور عمومی	$\forall$
۸۹ ص	سور وجودی	$\exists$
۱۱۷ ص	معکوس R	$\bar{R}$
۱۴۰ ص	عمل‌گر احتمال	$M(\Diamond)$
۱۴۰ ص	عمل‌گر ضرورت	$N(\Box)$
۱۴۱ ص	استلزام اکید (قلاّب)	$\leftrightarrow$
۱۵۲ ص	شرطی خلافِ واقع	$\Box \rightarrow$
۱۵۳ ص	عمل‌گرهای زمان	F, H, G, A
۱۸۹ ص	عمل‌گر یوتا	l
۱۹۳ ص	عمل‌گر لاندا	λ
۱۴۲ ص	الزام	O
۱۴۲ ص	جواز	P
۱۵ ص	مجموعه‌ها (در نظریه‌ی مجموعه)	$A, B, C \dots$
۸۱ ص	ثابت‌های محمولی (در منطق محمول‌ها)	$A, B, C \dots$
۱۵ ص	عضوهای مجموعه‌ها (در نظریه‌ی مجموعه)	$a, b, c \dots$
۸۱ ص	ثابت‌های فردی (در منطق محمولی)	$a, b, c \dots$
۱۹ ص	مجموعه‌ی مجموعه‌ها	$\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \dots$
۲۲ ص	تابع‌ها	$f, g, h \dots$
۶۰ ص	متغیرهای جمله‌ای	$p, q, r \dots$
۸۲ ص	متغیرهای فردی	$x, y, z \dots$
۸۲ ص	متغیرهای محمولی	$\Phi, \Psi, X \dots$
۹۵ ص	فرامتغیرهای فرمول‌های درست‌ساخت	α, β, γ
۹۵ ص	فرامتغیرهای عبارت‌های محمولی	$P, Q, R \dots$
۹۵ ص	فرامتغیرهای عبارت‌های فردی	$t_1, t_2 \dots t_n$

* در متن ترجمه، عبارت‌ها به زبان انگلیسی و دیگر زبان‌های طبیعی و نیز اصطلاح‌ها و معنای آن‌ها در پانویست قرار داده شده؛ واژه‌های مهم نیز با حروف پررنگ معرفی شده‌اند.

فصل اول

منطق برای زبان‌شناسان

بیش‌تر زبان‌شناسان قرن بیستم، جنبه‌های ساختی زبان را موضوع اصلی مطالعه‌ی خود قرار داده‌اند. این امر نه تنها در مورد ساخت‌گرایانی چون سوسور^۱، یلمزلف^۲، بلومفیلد^۳ و زبان‌شناسان مکتب پراگ صدق می‌کند، شاید حتی بارزتر، در مورد چامسکی^۴ و مکتب زایشی-گشتاری نیز، که در مطالعه‌ی صوری ساخت زبان‌شناختی موفقیت‌هایی چشمگیر به‌دست آورده‌اند، صادق باشد. چشم‌گیرترین موفقیت‌های ساخت‌گرایی^۵ در زمینه‌های واج‌شناسی و صرف‌ونحو بوده است؛ اما درباره‌ی ساختار صوری محتوا و معنای زبان توفیق چندانی حاصل نمی‌شد و بسیاری از ساخت‌گرایان در واقع، محتوای زبان را به حدی نادیده گرفته‌اند که اصولاً معناشناسی را بخشی از زبان‌شناسی تلقی نمی‌کنند.

بنابراین، برخی از تلاش‌های جالب توجه برای توصیف ساختار محتوا و نیز ساخت به‌طور کلی را باید نه در زبان‌شناسی، به مفهوم خاص آن، بلکه در منطق صوری یافت. گرچه منطق قرن بیستم، منطق ریاضیات و زبان ریاضی را محور کار خود قرار داده، باوجوداین، منطق‌دانانی چون فرگه^۶، راسل^۷، کارنپ^۸، رایشنباخ^۹ و مونتگیو^{۱۰} زبان عادی روزمره را نیز، هر چند به‌طور

1. Ferdinand de Saussure

2. Louis Hjelmslev

3. Leonard Bloomfield

4. Noam Chomsky

۵. برای شرحی مختصر در مورد زبان‌شناسی ساخت‌گرا، ر. ک. (1973) Davies.

6. Gottlob Frege

7. Bertrand Russell

8. Rudolf Carnap

9. Hans Reichenbach

10. Richard Merritt Montague.

ناقص‌تر تحلیل کرده‌اند.^۱ امروزه زبان‌شناسان و منطق‌دانان به‌طور جدی شروع به استفاده از روش‌های منطقی در مطالعه‌ی زبان‌های طبیعی کرده‌اند و چندین تحلیل بسیار جالب از ساخت معنایی پدید آمده است.

هدف این کتاب، آشنا کردن دانشجویان زبان‌شناسی و دیگر علاقه‌مندان معناشناسی زبان‌های طبیعی با برخی مفاهیم و نظریه‌های بنیادی منطقی است. امروزه اطلاعاتی در باب این‌گونه مفاهیم و نظریه‌ها، برای کسانی که معناشناسی معاصر یا به‌طور کلی زبان‌شناسی را مطالعه می‌کنند، لازم است. روش‌هایی که منطق صوری برای مطالعه‌ی معناشناسی زبان‌های ساختگی ارائه کرده است، به‌نحوی سودمند در مورد معناشناسی زبان طبیعی به‌کار رفته است؛ و به‌طور کلی، روش‌ها و رهیافت‌های اتخاذ شده از نظریه‌ی منطقی و ریاضی، به‌طور روزافزون در نظریه‌ی زبان‌شناختی، متداول شده است. دستور گروه ساختی که چامسکی در کتاب «ساخت‌های نحوی» (۱۹۵۷) ارائه کرد، نمونه‌ی خوبی از این کاربردهاست. در این کتاب، با استفاده از نوع دستوری که پاول مارتین پُست^۲، منطق‌دان آمریکایی، برای توصیف ساخت زبان‌های صوری ارائه داد، چامسکی توانسته است «دستگاه‌های بازنویسی» را در مورد زبان‌های طبیعی به‌کار گیرد.

هدف دیگر ما این است که ضمن کمک به پر کردن شکاف بین زبان‌شناسی و منطق، زبان‌شناسان و منطق‌دانان را به همکاری نزدیک‌تر در زمینه‌ی مطالعه‌ی مشترک‌شان در مورد ساخت زبان تشویق کنیم؛ گرچه هدف اصلی نگارش این کتاب، تأکید بر جنبه‌های مقدماتی و آموزشی بوده، کوشیده‌ایم با ارائه‌ی نمونه‌هایی از این‌که چه‌گونه می‌توان تحلیل منطقی را در مورد زبان طبیعی به‌کار برد و نیز بحث درباره‌ی رابطه‌ی بین تحلیل منطقی و زبانی، و بین منطق و زبان طبیعی، ادعای خود را مبنی بر این‌که منطق، حوزه‌ای در خور مطالعه برای افرادی است که در اساس با زبان طبیعی سروکار دارند، به اثبات برسانیم.

هر چند کل کتاب را می‌توان برهانی ضمنی در اثبات ارزش منطق برای زبان‌شناسی تلقی کرد، در فصل پایانی، به‌طور صریح در این زمینه به بحث پرداخته‌ایم.

۱. برای تاریخچه‌ای از منطق جدید و قدیم ر.ک. (Kneale and Kneale (1962)

2. Paul Martin Post (1936)

فصل دوم

نظریه‌ی مجموعه‌ها

۱.۲ مجموعه‌ها و اعضوها

در فصل‌های بعد، از مفاهیم رایج در نظریه‌ی مجموعه‌ها به طور مکرر استفاده خواهیم کرد.^۱ نظریه‌ی مجموعه‌ها علاوه بر ارتباطی که با منطق دارد، در ریاضیات نقشی اساسی ایفا می‌کند و در زبان‌شناسی نیز کاربردهایی مستقیم دارد. بنابراین، در آغاز، مهم‌ترین مفاهیم این نظریه را توضیح می‌دهیم.

مجموعه عبارت است از تعدادی یا گردآورده‌ای از شیء‌ها یا موجوداتی از هر نوع. اصطلاح‌های دیگری که اغلب برای اشاره به مجموعه‌ها به کار می‌رود، عبارت‌اند از: «رده» و «گروه» (گرچه این دو اصطلاح در ریاضیات کاربردهای فنی دیگری نیز دارند). هر مجموعه شامل تعدادی عنصر یا عضو است. مجموعه‌هایی که ما در زندگی روزمره با آن‌ها سروکار داریم، معمولاً شامل عضوهایی است که وجه مشترکی با هم دارند؛ مانند مجموعه‌ی همه‌ی ایرانی‌ها یا مجموعه‌ی تمام کتاب‌های موجود در یک کتابخانه‌ی خاص. نظریه‌ی مجموعه‌ها چنین محدودیتی را بر مجموعه‌ها بار نمی‌کند؛ یک مجموعه می‌تواند از عضوهایی تشکیل شود که هیچ ارتباطی با هم ندارند؛ می‌توان مجموعه‌ای را در نظر گرفت که شامل رئیس‌جمهور ایران، کوچک‌ترین قمر مریخ و جذر عدد هفت باشد.

چند قرارداد نمادگذاری: از حروف بزرگ ایتالیک (A ، B ، C ، ...) برای اشاره به مجموعه‌ها و از حروف کوچک ایتالیک (a ، b ، c ، ...) برای اشاره به هر یک از شیء‌هایی که عضو مجموعه‌ها هستند، استفاده خواهیم کرد. هم‌چنین نماد $\in$ را معرفی می‌کنیم، که باید

۱. از میان کتاب‌های مقدماتی خوب درباره‌ی نظریه‌ی مجموعه‌ها می‌توان به (Halmos (1960)، (Stoll (1961) و (Lipschutz (1964) اشاره کرد.

چنین خوانده شود: «عضوی است از ...». برای مثال، جمله‌ی « a عضوی است از B » به صورت $a \in B$ نوشته می‌شود. هم‌چنین اگر بخواهیم بگوییم a عضوی از B نیست، آن را به صورت $a \notin B$ می‌نویسیم.

همین‌طور برای نوشتن عبارت‌هایی چون «مجموعه‌ای که متشکل از این افراد است: علی، بهرام، منیژه» یا «مجموعه‌ی همه‌ی ایرانی‌هایی که موی بور دارند»، نیاز به نمادگذاری داریم. برای این کار، از دو ابرو $\{ \}$ استفاده می‌کنیم. همان‌طور که از این مثال‌ها برمی‌آید، حداقل دو روش برای تعریف مجموعه‌ها وجود دارد: شمارش و توصیف

مثال‌های ما با دو ابرو به صورت زیر در می‌آید:

شمارش: $\{ \text{علی، بهرام، منیژه} \}$

توصیف: $\{ x \text{ یک ایرانی مو بور است} \mid x \}$

(که باید خوانده شود: «مجموعه همه‌ی x هایی که x یک ایرانی مو بور باشد».)

در زبان عادی نیز ساخت‌هایی برای بیان مفاهیم بالا وجود دارد. مثلاً در روش شمارش، معمولاً از حرف ربط «و» استفاده می‌کنند، مانند: «علی، بهرام و منیژه». در روش توصیفی از بندهای موصولی استفاده می‌کنند، مانند «آن‌هایی که ایرانی هستند»، «ایرانی‌ها».

گرچه ممکن است تعجب‌آور باشد، اما باید دانست که در نظریه‌ی مجموعه‌ها امکان دارد مجموعه‌هایی داشته باشیم که تنها دارای یک عضو و حتی بدون عضو باشند. به ازای هر فرد یا شیء در جهان، مجموعه‌ای وجود دارد که تنها عضو آن، همان فرد یا شیء است. برای مثال، با شخص a می‌توان مجموعه‌ی $\{a\}$ را تشکیل داد. به‌خاطر داشته باشید که a و $\{a\}$ دو چیز متفاوت‌اند: a مجموعه نیست.

مجموعه‌ای که تنها یک عضو داشته باشد، مجموعه‌ی تک‌عضوی و مجموعه‌ای که هیچ عضوی نداشته باشد (دارای صفر عضو باشد)، مجموعه‌ای تهی نامیده می‌شود. البته بهتر است گفته شود «مجموعه‌ی تهی» و نه «یک مجموعه‌ی تهی»؛ زیرا تنها یک مجموعه‌ی تهی وجود دارد، که آن را با نماد $\emptyset$ نشان می‌دهند. دلیل این‌که می‌گوییم تنها یک مجموعه‌ی تهی وجود دارد، این است که در نظریه‌ی مجموعه‌ها، اصلی کلی به نام اصل هم‌مصادقی وجود دارد، که می‌گوید: برای آن‌که دو مجموعه از یک‌دیگر متمایز باشند، باید حداقل یک چیز داشته باشیم که عضویکی از آن‌هاست، اما عضو دیگری نیست. به عبارت دیگر، اگر فهرست عناصر موجود در دو مجموعه یک‌سان باشد، با یک مجموعه‌ی واحد سروکار داریم. بدیهی است که هر

مجموعه‌ی تهی دارای تعداد یک‌سانی عضو (یعنی صفر) است. بنابراین، تنها یک مجموعه‌ی تهی وجود دارد. نتیجه‌ی متعارض‌گونه‌ی این مسئله آن است که مثلاً بگوییم مجموعه‌ی همه رؤسای جمهور زن ایالات متحده با مجموعه‌ی همه سگ‌هایی که می‌توانند برنامه‌ی کامپیوتر بنویسند، یکی است. با وجود این، اگر تفاوت بین (الف) شیوه‌ی انتخاب عضوهای یک مجموعه (معیار تمایز عضوها از غیرعضوها) و (ب) عضوهایی که عملاً انتخاب می‌شوند را در نظر بگیریم، این مسئله بهتر درک می‌شود. بدیهی است که عضوهای یک‌سان را می‌توان به روش‌های بسیار متفاوت انتخاب کرد. منظور از اصل هم‌مصادقی این است که روش‌های انتخاب عضوهای مجموعه کاملاً نادیده گرفته شود. این امر مربوط است به تمایز بین مفهوم و مصداق یا دایره‌ی مصداق‌های یک عبارت زبانی - تمایزی که در فصل‌های بعدی این کتاب از اهمیت بسیار برخوردار خواهد بود.

یک عبارت اسمی را در نظر بگیرید که مجموعه‌ای را توصیف می‌کند، مثل «ایرانی‌هایی که موی بور دارند»؛ می‌توان گفت که این عبارت اسمی با مشخص کردن تعدادی از ویژگی‌های مشترک، شیء‌ها یا موجوداتی معین را در جهان انتخاب می‌کند (به آن‌ها اشاره می‌کند). موجودات انتخاب شده یا مورد اشاره - یعنی افرادی که ایرانی و مو بور هستند - مصداق‌های این عبارت اسمی‌اند؛ در صورتی که شیوه‌ی انتخاب آن‌ها، یعنی معیارهایی که برای تعیین مصداق‌های این عبارت به کار رفته، مفهوم عبارت خواهد بود. به این ترتیب، می‌توان گفت که مفهوم «مجموعه» در نظریه‌ی مجموعه‌ها، مصداقی است؛ به این معنا که در این نظریه به روش‌های انتخاب اعضای مجموعه کاری نداریم؛ عنوان «اصل هم‌مصادقی» نیز از این رو انتخاب شده است.

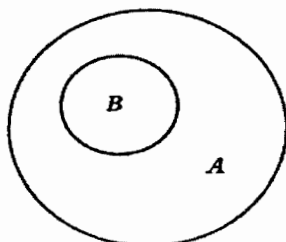
هم‌چنین، از آن‌چه گفته شد، درمی‌یابیم که مفهوم ریاضی مجموعه با مفهوم متداولی که واژه‌هایی مثل «رده» و «گروه» را برای آن به کار می‌بریم، کاملاً یک‌سان نیست؛ گرچه در آغاز این فصل، بین آن‌ها فرقی قایل نشدیم. وقتی در زندگی روزمره از گروه، مثلاً گروهی از مردم صحبت می‌شود، اغلب این‌طور فکر می‌کنیم که این گروه ثابت است، علی‌رغم آن که عضوهایش از زمانی به زمان دیگر تغییر می‌کنند. به این ترتیب، می‌توان مثلاً درباره‌ی گروهی از مردم که بر بریتانیا حکومت می‌کنند، صحبت کرد و حتی جمله‌هایی مانند «اعضای این گروه در حال حاضر بیش از اعضای آن در گذشته است» را به کار برد. اگر فرض بر این بود که اصل هم‌مصادقی در مورد موجودی که با عبارت «این گروه» به آن اشاره می‌شود، برقرار است،

جمله‌ی بالا یک جمله‌ی متناقض می‌بود. هم‌چنین، باید توجه داشت که گرچه به گروه‌ها، رفتارهای زیادی را نسبت می‌دهیم و مثلاً می‌گوییم، «آن‌ها فلان کارها (ی دسته‌جمعی) را انجام می‌دهند» - مانند «گروه ما دادخواست برای دولت فرستاد» - بعضی از ریاضی‌دان‌ها خواهند گفت که مجموعه‌ها، موجوداتی انتزاعی هستند و نمی‌توانند چنین کارهایی انجام دهند.

مجموعه‌ی ویژه‌ی دیگری وجود دارد که مجموعه‌ی فراگیر نامیده می‌شود و آن را به‌صورت 1 (عدد یک) نشان می‌دهند. برای توضیح مجموعه‌ی فراگیر، ناگزیر از معرفی یک مفهوم دیگر، یعنی عالم سخن هستیم، که می‌توان آن را با مسامحه چنین تعریف کرد: «هر چیزی که در متن یا گفت‌وگویی معین، از آن صحبت می‌شود». برای مثال، در یک کتاب درسی ریاضی، عالم سخن می‌تواند همه‌ی اعداد باشد، درحالی‌که در یک کتاب درسی فیزیک، عالم سخن را ممکن است همه‌ی اجسام فیزیکی تشکیل دهند. به این ترتیب، مجموعه‌ی فراگیر عبارت است از مجموعه‌ی همه‌ی افراد در عالم سخن مربوطه.

۲.۲ نسبت‌های بین مجموعه‌ها

تعدادی از مفاهیم نظریه‌ی مجموعه‌ها مربوط به نسبت‌های بین مجموعه‌هاست. این نسبت‌ها را می‌توان با ترسیم مجموعه‌ها به شکل دایره نشان داد. برای مثال، مجموعه‌ی همه‌ی اروپایی‌ها و مجموعه‌ی همه‌ی انگلیسی‌ها را در نظر بگیرید. از آن‌جاکه همه‌ی انگلیسی‌ها اروپایی هستند، برای نشان دادن نسبت بین این دو مجموعه، می‌توان نمودار (۱) را ترسیم کرد، که در آن A عبارت از مجموعه‌ی همه‌ی اروپایی‌ها و B مجموعه‌ی همه‌ی انگلیسی‌هاست. در چنین موردی می‌گوییم B زیر مجموعه‌ی A است، یا به عبارت دیگر، B مندرج در A است. در نظریه‌ی مجموعه‌ها معمولاً بین دو رابطه‌ی «اندراج» و «اندراج محض» فرق می‌گذارند. اگر مجموعه‌ای چون B به‌طور کامل (properly) مندرج در مجموعه‌ی A باشد، همه‌ی اعضای B ، اعضای A خواهند بود. به علاوه، A حداقل یک عضو خواهد داشت که عضو B نباشد. در این حالت می‌نویسیم $B \subset A$ نماد $\subset$ یعنی «... کاملاً مندرج در ... است» یا «... زیر مجموعه‌ی محض ... است». در صورتی که نخواهیم ادعا کنیم که A حداقل یک عضو دارد که متعلق به B نیست (که اغلب، همین‌طور است)، می‌نویسیم $B \subseteq A$ که بدین معناست: « B مندرج در A است» یا « B زیر مجموعه‌ی A است».



(۱)

برای آن‌که بگوییم A و B مجموعه‌های یکسان‌اند - به عبارت دیگر، یکی هستند - می‌نویسیم: $A=B$. همان‌طور که در بخش گذشته دیدیم، معنای جمله‌ی اخیر این است که دو مجموعه، دارای اعضای یکسان‌اند.

لازم است بین دو رابطه‌ی «عضوی است از...» و «زیرمجموعه‌ای است از...» فرق بگذاریم. مجموعه‌ی همه‌ی انگلیسی‌ها زیرمجموعه‌ای از مجموعه‌ی همه‌ی اروپایی‌هاست، اما عضوی از آن نیست. از سوی دیگر، «جان اسمیت» عضوی از مجموعه‌ی همه‌ی انگلیسی‌هاست، درحالی‌که زیرمجموعه‌ی آن محسوب نمی‌شود.

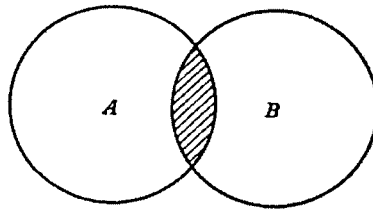
۳.۲ عمل‌های روی مجموعه‌ها

مجموعه‌هایی نیز وجود دارد که اعضای آن‌ها خود، هر کدام یک مجموعه است. (چنین مجموعه‌هایی را گاه خانواده نیز می‌نامند). مثلاً به ازای هر مجموعه‌ای مانند A می‌توان مجموعه‌ای تشکیل داد که از همه‌ی زیرمجموعه‌های A تشکیل شده باشد. این مجموعه را **مجموعه‌ی توانی** A می‌گویند. مثال: $\{a, b\}$ دارای این زیرمجموعه‌هاست: $\emptyset$ ، $\{a, b\}$ ، $\{b\}$ و $\{a\}$. (مجموعه‌ی تهی، زیرمجموعه‌ی همه‌ی مجموعه‌هاست)، پس مجموعه‌ی توانی $\{a, b\}$ عبارت خواهد بود از: $\emptyset$ و $\{a, b\}$ و $\{b\}$ و $\{a\}$.

برای آن‌که مجموعه‌های مجموعه‌ها از مجموعه‌های معمولی تمیز داده شود، برای اشاره به آن‌ها، از حروف بزرگ **تحریری** مثلاً $\mathcal{A}$ استفاده خواهیم کرد.

قبلاً در مورد شیوه‌های مختلف تعریف مجموعه صحبت کردیم. با استفاده از آن‌چه اصطلاحاً **عمل‌های مجموعه‌ای** یا **عمل‌های روی مجموعه‌ها** نامیده می‌شود، می‌توان یک مجموعه را برحسب مجموعه‌های دیگر نیز تعریف کرد. هرگاه دو مجموعه‌ی A و B داشته باشیم، می‌توانیم مجموعه‌ای را تعریف کنیم که شامل همه‌ی اشیایی باشد که هم عضو A و هم عضو B

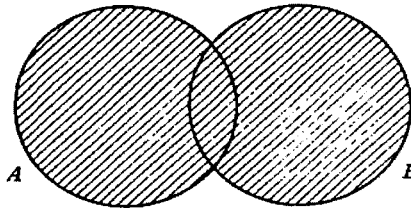
هستند. چنین مجموعه‌ای را «اشتراک A و B » می‌نامند و آن را با $A \cap B$ نشان می‌دهند. در نمودار (۱) قسمت سایه خورده، این مجموعه را نشان می‌دهد.



(۱)

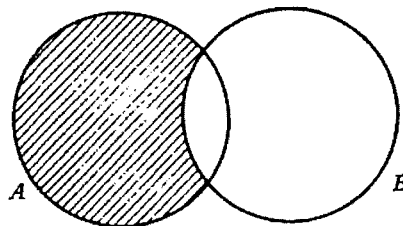
مثال: اگر A مجموعه‌ی همه‌ی زبان‌شناسان و B مجموعه‌ی همه‌ی سوندی‌ها باشد، آن‌گاه $A \cap B$ مجموعه‌ی همه‌ی زبان‌شناسان سوندی خواهد بود.

هم‌چنین ممکن است بخواهیم از مجموعه‌ی همه‌ی چیزهایی صحبت کنیم که عضوی از دو مجموعه‌ی A و B یا هر دو باشند. این مجموعه، اجتماع A و B نامیده می‌شود و آن را با $A \cup B$ نشان می‌دهند. این مجموعه در نمودار (۲) نشان داده شده است.



(۲)

مثال: اگر A مجموعه‌ی همه‌ی افرادی باشد که کتاب «شاهنامه‌ی فردوسی» را خوانده‌اند و B مجموعه‌ی همه‌ی افرادی باشد که کتاب «بوستان سعدی» را خوانده‌اند، $A \cup B$ مجموعه‌ی همه‌ی افرادی خواهد بود که کتاب «شاهنامه‌ی فردوسی» یا «بوستان سعدی» (یا هر دو) را خوانده‌اند.



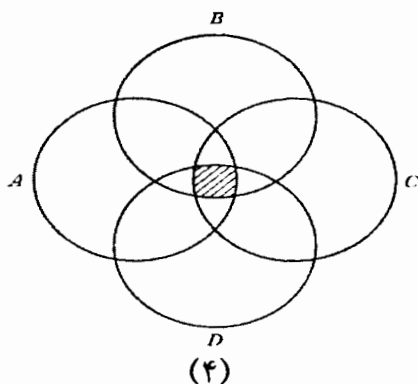
(۳)

مجموعه‌ی سایه زده شده در نمودار (۳)، یعنی مجموعه‌ی همه‌ی چیزهایی که عضو A هستند ولی عضو B نیستند، «تفاضل A و B » نامیده می‌شود و آن را به صورت $A - B$ (بخوانید A منهای B)

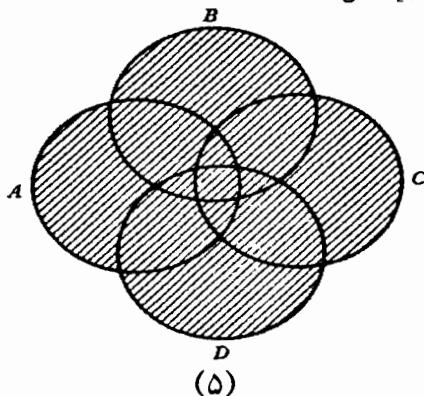
نشان می‌دهند. مثال: اگر A مجموعه‌ی همه‌ی ایرانی‌ها و B مجموعه‌ی همه‌ی کسانی باشد که می‌توانند انگلیسی صحبت کنند، آن‌گاه $A-B$ مجموعه‌ی همه‌ی ایرانی‌هایی است که نمی‌توانند انگلیسی صحبت کنند (مجموعه‌ی همه‌ی ایرانی‌هایی که فقط فارسی صحبت می‌کنند).

تا این‌جا تنها درباره‌ی اعمال روی دو مجموعه صحبت کردیم، اما این عمل‌ها را می‌توان به سه مجموعه یا بیش‌تر هم تعمیم داد.

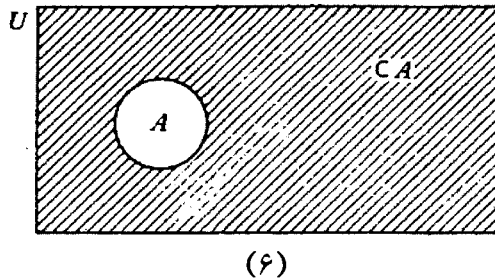
برای مثال، می‌توان اشتراک A, B, C و D (مجموعه‌ی دربرگیرنده‌ی همه‌ی چیزهایی که به هر چهار مجموعه‌ی A, B, C, D تعلق دارند) را به‌عنوان عملی روی مجموعه‌ی مجموعه‌های $\{A, B, C, D\}$ تعریف کرد و آن را با $\cap \{A, B, C, D\}$ [قسمت سایه‌زده شده در نمودار (۴)] نشان داد.



به همین ترتیب، اجتماع A, B, C و D (مجموعه‌ی دربرگیرنده‌ی همه‌ی چیزهایی که عضو حداقل یکی از چهار مجموعه‌ی A, B, C, D هستند) را می‌توان با $\cup \{A, B, C, D\}$ [قسمت سایه‌زده شده در نمودار (۵)] نشان داد.



یک مفهوم مهم دیگر، مفهوم مکمل یک مجموعه است. هرگاه عالم سخن معین U ^۱، مثلاً مجموعه‌ی همه‌ی انسان‌ها و زیرمجموعه‌ی A از آن، برای نمونه، مجموعه‌ی همه‌ی فرانسوی‌ها را در نظر بگیریم، آن‌گاه خواهیم توانست از مجموعه‌ی همه‌ی اعضای U که عضو A نیستند نیز صحبت کنیم - در این مثال، یعنی مجموعه‌ی همه‌ی انسان‌های غیرفرانسوی. این مجموعه را «مکمل A نسبت به U » می‌گویند. در نمودار (۶) مستطیل برابر است با U و دایره برابر است با مجموعه‌ی A و قسمت سایه‌زده شده همان مکمل A است که با CA ^۲ یا A نشان داده می‌شود.



۴.۲ نسبت‌ها^۳ و تابع‌ها^۴

مجموعه‌ی دو عضوی را زوج می‌گویند. چنان‌چه عضوهای یک زوج را به نحوی مرتب شده تلقی کنیم، یک زوج مرتب خواهیم داشت^۵. برای نشان دادن زوج‌های مرتب، به جای دوا برو { } از دوگوشه $< >$ استفاده می‌کنند. گاهی نیز برای این منظور، از پرانتز معمولی () استفاده می‌شود.

۱. حرف اول universe of discourse (عالم سخن) است - م.

۲. حرف اول complement of a set (مکمل مجموعه) است - م.

۳. relation (نسبت) در منطق سنتی به دقت تعریف نشده است، در دوره‌ی معاصر برخی منطق‌دانان به منطق نسبت‌ها پرداخته‌اند و در حال حاضر، این موضوع، بخشی مهم از منطق را تشکیل می‌دهد. در نوشته‌های امروز، به خصوص در نظریه‌ی مجموعه‌ها، نسبت دوتایی، مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب تعریف می‌شود. (ر. ک. ضیا موحد (۱۳۷۴). واژه‌نامه‌ی توصیفی منطق. تهران: پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی) - م.

۴. function (تابع) را غالباً نسبتی دوتایی تعریف می‌کنند که به هر شیء x از دامنه‌ی آن، شیء منحصر به فرد y را نسبت دهد. چنان‌چه زوج مرتب $< x, y >$ متعلق به آن نسبت باشد، تابع را گاهی به یک تناظر چند به یک نیز تعریف می‌کنند. (ر. ک. موحد (پیشین)) - م.

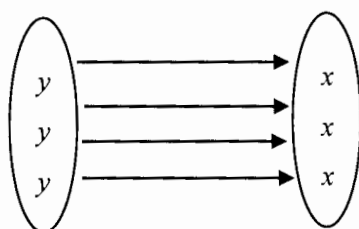
۵. اگرچه مفهوم زوج مرتب در بیش‌تر کتاب‌های درسی به این ترتیب معرفی می‌شود، این طریقه کاملاً صحیح نیست. همان‌طور که در متن اصلی اشاره شد، از مفهوم زوج مرتب برای توضیح مفهوم نسبت دومتایی استفاده می‌شود. موردی را در نظر بگیرید که کسی یا چیزی نسبت خاصی با خودش دارد. مثل ادیپ (Oedipus) که ناپدری خود بود. این رابطه با کدام زوج مرتب متناظر است؟ تنها می‌توان گفت که آن را به صورت $< \text{ادیپ، ادیپ} >$ نشان می‌دهیم. اما این یک مجموعه‌ی دو عضوی نیست، زیرا عضو اول با عضو دوم یکی است. بنابراین، ما چیزی انتزاعی ←

وقتی با مجموعه‌های نامرتب سروکار داریم، ترتیب شمارش عضوها اهمیتی ندارد. بنابراین، مجموعه‌ی $\{a, b\}$ با مجموعه‌ی $\{b, a\}$ یکی است؛ درحالی‌که زوج مرتب $\langle a, b \rangle$ با زوج مرتب $\langle b, a \rangle$ یکی نیست. برای روشن شدن مسئله، باید در این جا به‌طور مختصر، مفهوم نسبت را - که در بخش ۸.۵ با تفصیل بیش‌تر مورد بحث قرار خواهد گرفت - توضیح دهیم. یک نسبت «دوموضعی» مثل: «باهوش‌تر بودن از» بین دو شیء منفرد برقرار می‌شود، که آن دو شیء باید اعضای یک زوج مرتب تلقی شوند. بدیهی است که ترتیب دو چیز منفرد در این جا ضروری است؛ مثلاً «بابک باهوش‌تر از حسین است» با «حسین باهوش‌تر از بابک است» یکی نیست.

به همین ترتیب، می‌توان از سه‌تایی مرتب (که سه عضو دارد)، چهارتایی مرتب (که چهار عضو دارد)، پنج‌تایی مرتب (که پنج عضو دارد) و به‌طور کلی، از n - تایی مرتب سخن گفت (این‌ها به ترتیب، متناظرند با روابط ۳، ۴، ۵، و n - موضعی). روزهای سال را نیز می‌توان یک ۳۶۵ تایی مرتب تلقی کرد.

یک مفهوم بسیار مهم در منطق، ریاضیات و زبان‌شناسی، مفهوم تابع است. مثالی می‌زنیم؛ هر اتومبیلی یک شماره دارد. حال مجموعه‌ی همه‌ی اتومبیل‌ها و همه‌ی شماره‌اتومبیل‌ها را در نظر بگیرید.

به نمودار (۱) توجه کنید:



مجموعه‌ی همه‌ی شماره اتومبیل‌ها مجموعه‌ی همه‌ی اتومبیل‌ها

(۱)

→ می‌خواهیم که دو جای خالی داشته باشد، به‌طوری‌که عضو اول زوج مرتب در اولین و عضو دوم، در دومین جای خالی آن قرار گیرد و یک موجود واحد هم بتواند هر دو جای خالی را در آن واحد پر کند. این دو امکان را می‌توان با دو «بازی» نشان داد. فرض کنید جعبه‌ای از مهره‌ها را در مقابل خود داریم. در هر دو بازی، شخص باید دو انتخاب از یک مهره داشته باشد. در بازی اول، شخص باید دو انتخاب از یک مهره‌ی واحد داشته باشد. اما در بازی دوم، مهره‌ای را که ابتدا برداشته بود، قبل از انتخاب مهره‌ی دوم به جعبه برمی‌گرداند، به‌طوری‌که امکان انتخاب دوباره‌ی آن باشد. پس، تنها در مورد اول است که الزاماً یک مجموعه‌ی دو عضوی به‌دست می‌آوریم. بنابراین، متناظر با این دو بازی، دو مفهوم تشخیص می‌دهیم؛ یک مجموعه‌ی مرتب n عضوی و یک n تایی مرتب، که تنها در n تایی مرتب است که یک عضو واحد می‌تواند در چند جای خالی تکرار شود. پس زوج مرتب، یک دوتایی مرتب است.

هر x و هر y نماینده‌ی یک عضو از مجموعه‌ی مربوط به خود است (واضح است که تعداد اعضاها باید خیلی بیش از این‌ها باشد). از هر عضو در مجموعه‌ی سمت چپ، یعنی مجموعه‌ی همه‌ی اتومبیل‌ها، پیکانی به طرف عضوی در مجموعه‌ی سمت راست، یعنی شماره‌ی آن اتومبیل، ترسیم شده است. به این ترتیب، تعداد بسیار زیادی زوج مرتب به دست می‌آوریم که در آن‌ها عضو اول، یک اتومبیل و عضو دوم، شماره‌ی آن است. مانند $\langle ۷۷۲۱۲, ۲۵ \rangle$ ، اتومبیل بابک. در این‌جا به هر عضو از مجموعه‌ی اول، یک عضو از مجموعه‌ی دوم نسبت داده‌ایم. چنین نسبتی را تابع می‌گویند. برای آن‌که تابعی داشته باشیم، باید به ازای هر عضو از مجموعه‌ی اول دقیقاً یک عضو از مجموعه‌ی دوم وجود داشته باشد (البته ممکن است به چند عضو از مجموعه‌ی اول، یک عضو از مجموعه‌ی دوم نسبت داده شود). به عبارت دیگر، پیکان‌ها می‌توانند هم‌گرا باشند، اما نباید واگرا باشند. (در بحث مربوط به ویژگی‌های صوری نسبت‌ها، بخش ۸.۵ به این مسئله باز خواهیم گشت).

حال، دو مجموعه‌ی A و B (نمودار ۲) و تابعی را که به هر عضو از مجموعه‌ی A یک عضو از مجموعه‌ی B را نسبت می‌دهد، در نظر بگیرید (تابع با پیکان نشان داده شده است). در این صورت، می‌گوییم تابعی داریم از A به B یا تابعی داریم که A را در B می‌نگارد.



(۲)

اصطلاح اخیر (نگاشتن) ممکن است در وهله‌ی اول عجیب به نظر بیاید؛ اما در متون فنی زبان‌شناسی، زیاد از آن استفاده می‌شود. برای مثال، در دستور گشتاری، یک گشتار را می‌توان تابعی محسوب کرد که مجموعه‌ای از ساختارها را در مجموعه‌ای دیگر از ساختارها می‌نگارد. این جمله، در واقع، بیان ریاضی این واقعیت است که به ازای هر ساختی که وارد یک گشتار می‌شود، دقیقاً یک ساختار وجود دارد که از آن خارج می‌گردد.

نمونه‌هایی از تابع‌ها را که عادی‌ترند، می‌توان مثلاً در هر کتابی که دارای جدول‌های آماری باشد، پیدا کرد. برای مثال، ممکن است جدولی پیدا کنیم که شامل فهرست کشورهای اروپایی و جمعیت آن‌ها باشد^۱.

آلبانی	۲/۳۳۷/۶۰۰	
آندورا	۲۵/۰۰۰	
اتریش	۷/۴۵۶/۴۰۳	
.....	یا	

(۳)

چنین جدولی نشان‌دهنده‌ی تابعی است که ستون راست آن متناظر با مجموعه‌ی A در نمودار (۲) و ستون چپ آن متناظر با مجموعه‌ی B در همان نمودار است. به عبارت دیگر، تابعی داریم که مجموعه‌ی کشورها را در مجموعه‌ی اعداد می‌نگارد.

اصطلاحات دیگری نیز وجود دارد، که باید توضیح داده شود. هر عضو در ستون سمت راست، «شناسه‌ای از تابع» و عدد متناظر با آن در ستون سمت چپ، «مقدار تابع به ازای آن شناسه» است. تابع را با حروف کوچک لاتین نشان می‌دهند و معمولاً اولین تابع حرف f و بقیه در صورتی که وجود داشته باشد با حروف بعد از آن نشان داده می‌شود. وقتی می‌نویسیم $f(x)$ ، منظورمان مقداری است که تابع به ازای شناسه‌ی x دارد. اگر f تابعی باشد که در جدول بالا نشان داده شد، مثلاً می‌توان نوشت: $۸/۰۰۰/۰۰۰ = f(\text{سوئد})$ به این معنا که تابع، به ازای شناسه‌ی سوئد، مقدار $۸/۰۰۰/۰۰۰$ را پیدا می‌کند؛ به عبارت دیگر، جمعیت سوئد ۸ میلیون است.

مجموعه‌ی همه‌ی شناسه‌های ممکن تابع (مثلاً مجموعه‌ی A در نمودار (۲)) دامنه‌ی تابع نامیده می‌شود و مجموعه‌ی همه‌ی مقدارهای ممکن تابع را بُرد یا هم‌دامنه‌ی تابع می‌نامند.

اگر هر عضو مجموعه‌ی B ، مقدار تابع به ازای عضوی از مجموعه‌ی A باشد، به جای آن‌که بگوییم تابع [مورد نظر] A را در B می‌نگارد، می‌گوییم A را روی B می‌نگارد.

اگر A و B یک مجموعه باشد، یعنی تابع، مجموعه‌ی A را روی A خودش بنگارد، می‌گویند تابع، یک عمل است. نمونه‌ای از عمل در ریاضیات، «مکعب...» است، که اعداد را روی

۱. آمار قدیمی و مربوط به زمان نگارش کتاب اصلی است - م.

۲. در متن انگلیسی onto نوشته شده است، اما مثال «مکعب» که در ادامه‌ی متن انگلیسی می‌آید، با این تعریف هم‌خوانی ندارد، زیرا همه‌ی اعداد مکعب نیستند - م.

اعداد می‌نگارد. (مثلاً مکعب ۳، عدد ۲۷ است).^۱ اگر اعداد طبیعی، از ۱ تا عدد دل‌خواه m ، روی مجموعه‌ی دیگری از شیء‌ها، مانند A نگاشته شوند، یک دنباله خواهیم داشت (در واقع به هر عضو از مجموعه‌ی A ممکن است یک یا چند عدد تعلق گیرد). بعضی از تابع‌ها بیش از یک شناسه دارند. برای نمونه، جدولی از فواصل بین شهرهای بزرگ جهان را برحسب مایل^۲ در نظر می‌گیریم. این جدول چیزی شبیه جدول (۴) خواهد بود.

برلین	بونیوس آیرس	قاهره	کلکته
برلین	۷۴۰۲	۱۷۹۵	۴۳۶۸
بونیوس آیرس	-	۷۳۴۵	۱۰۲۶۵
قاهره	۱۷۵۹	-	۳۵۳۹
کلکته	۴۳۶۸	۱۰۲۶۵	۳۵۳۹

(۴)

در این مورد، تابعی داریم دو شناسه‌ای، که هر شناسه آن یک زوج از شهرها و مقدار تابع، فاصله‌ی میان آن دو شهر است.

این فصل را با ذکر نوعی ویژه از تابع، که بعداً مورد استفاده قرار خواهد گرفت، به پایان می‌بریم. دو مجموعه‌ی A و B را در نظر بگیرید که B زیرمجموعه‌ی A باشد. A می‌تواند مثلاً مجموعه‌ی اعضای مجلس بریتانیا و B مجموعه‌ی نمایندگان باشد که عضو حزب اکثریت هستند. حال، مجموعه‌ی سومی مثل مجموعه‌ی C را در نظر بگیرید که فقط دو عضو دارد، مجموعه‌ای متشکل از اعداد ۱ و ۰. اکنون می‌توان تابعی ساخت که به هر عضو A ، در صورتی که عضو B نیز باشد، ۱ و در صورتی که عضو آن نباشد، یعنی در مکمل B نسبت به A قرار داشته باشد، صفر را نسبت دهد. این تابع، تابع مشخصه‌ی مجموعه‌ی B نسبت به دامنه‌ی A نامیده می‌شود.

انتخاب مجموعه‌ی دو عضوی $\{۰، ۱\}$ اختیاری است: هر زوجی از اشیا که بتواند اعضای مجموعه‌ای را که می‌خواهیم مشخص کنیم، از مکمل آن متمایز کند، می‌تواند به عنوان مجموعه‌ی C استفاده شود. در منطق، معمولاً ارزش‌های صدق و کذب را آن دو شیء دل‌خواه در نظر می‌گیرند که بُرد تابع مشخصه به شمار می‌آیند.

۱. متن انگلیسی، مکعب عدد ۳ را ۹ ذکر کرده، که ظاهراً غلط تایپی است، چون مکعب عدد ۳ می‌شود ۲۷-م.

۲. مایل واحد رسمی انگلیس و امریکا و معادل ۱۶۰۹/۳ متر است (فرهنگ آریان‌پور، ج ۳، ص ۳۱۹۷-م).

تمرین

۱. با نماد بیان کنید:

(الف) b عضوی است از C

(ب) C زیرمجموعه‌ی محض D است

(پ) اجتماع A و C

(ت) مجموعه‌ای متشکل از عضوهای d ، e و g

(ث) d عضوی از اشتراک A و B است

(ج) مکمل A زیرمجموعه‌ی محض اجتماع B و C است

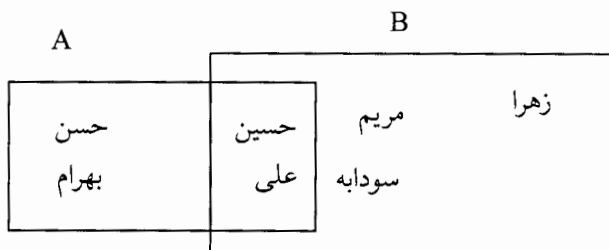
۲. عبارت‌های زیر را به زبان عادی برگردانید:

(الف) $\{x \mid x \text{ پسر است و مریم او را دیده است} \mid x\}$

(ب) $\{x \mid x \text{ دانشماری است} \mid x\} \cap \{x \mid x \text{ فیلسوف است} \mid x\}$

۳. مجموعه‌ی توانی $\{\text{لندن، ادینبورگ، دوبلین}\}$ چیست؟

۴. نمودار زیر را در نظر بگیرید:



کدام یک از جمله‌های زیر صادق و کدام یک کاذبند؟

(الف) بابک عضوی است از $A \cup B$ است

(ب) بابک عضوی است از $A \cap B$ است

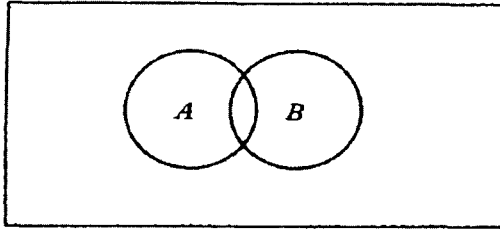
(پ) $A \cap B$ دو عضو دارد

(ت) $\{ \text{سودابه، مریم} \} \subset (A \cup B)$

(ث) $\{ \text{زهره، سودابه، مریم} \} \subset (B - A)$

(ج) $\{ \text{زهره، سودابه، مریم} \} \subseteq (A - B)$

۵. قسمتی را که متناظر با مجموعه‌ی $C(A \cap B)$ است، سایه بزنید.



۶. کدام یک از عبارت‌های زیر صادق و کدام یک کاذبند؟

الف) $c \in \{a, b, c\}$

ب) $d \notin \{a, b, c\}$

پ) $\{a, b, c\} \subset \{a, b, c\}$

ت) $\{a, b, c\} \subseteq \{a, b, c\}$

ث) $\{a, b\} \subseteq \{a, b, c\}$

ج) $c \in \{b, \{c\}\}$

چ) $\{c\} \in \{b, \{c\}\}$

۷. دامنه‌ها و هم‌دامنه‌های تابع‌های زیر را پیدا کنید.

الف) «پایتخت»

ب) «همسر (در یک جامعه‌ی تک‌همسری)»

پ) «مدیر (یا مدیری)»